DR. WINDISCH ANDOR
AZ ANGOL NYELVŰ CONCRETE STRUCTURES FOLYÓIRAT 2022. SZÁMÁBAN
(HTTP://FIB.BME.HU/FOLYOIRAT/CS/CS2022/CS2022_2.PDF) MEGJELENT
"EXTENDED RANKINE FAILURECRITERIA FOR CONCRETE" CÍMŰ CIKKÉNEK
MAGYAR NYELVŰ KIVONATA
– *DR. WINDISCH ANDOR* TOLLÁBÓL –

ÁLTALÁNOSÍTOTT RANKINE TÖRÉSI KRITÉRIUM BETONRA

Szerző: DR. WINDISCH ANDOR

Az MC2010 (Model Code 2010) a beton lehetséges törési feltételeiként *Rankine*-, *Drucker-Prager*- és *Mohr-Coulomb* kritériumait, valamint ezek módosításait vagy kombinációit említi.

Rankine törési feltétele szerint a tönkremenetel húzásra akkor következik be, amikor a maximális főfeszültség eléri az egytengelyű húzószilárdság f_{ct} értékét.

Drucker-Prager törési feltétele a *von Mises*-kritérium módosítása, figyelembe veszi a hidrosztatikus nyomás hatását a folyási szilárdságra,

Mohr-Coulomb törési feltétele szerint a maximális nyírófeszültség a mértékadó, a kritikus nyírófeszültség értéke a hidrosztatikus nyomás értékétől függ,

Coulomb 1776-ban mutatta be súrlódási hipotézisét: a tönkremenetel gyakran bizonyos csúszósíkok mentén fordul elő, amelyek ellenállását a kohéziónak nevezett paraméter és egy belső súrlódás határozza meg, amelyek nagysága a csúszósíkban fellépő normálfeszültség nagyságától függ (*1. ábra*).

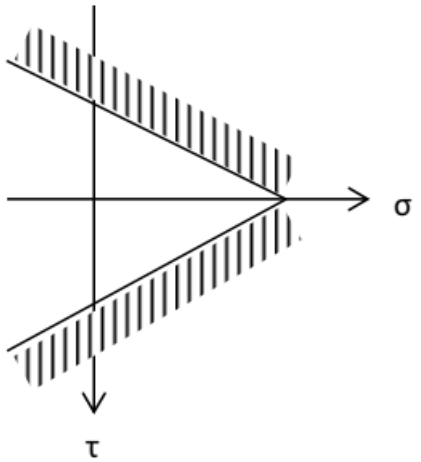
Coulomb két független szilárd test közötti sík felületen fellépő súrlódással foglalkozott. Hipotézise nem vonatkozik egy szilárd test két részre való szétválasztására. Miután az érintkezési felülettel párhuzamos erő legyőzte a nyugalmi súrlódási erőt, a két test egymáson elcsúszik.

1882-ben *Mohr* azt feltételezte, hogy a tönkremenetel akkor következik be, ha egy keresztmetszetben ható feszültségek kielégítik az

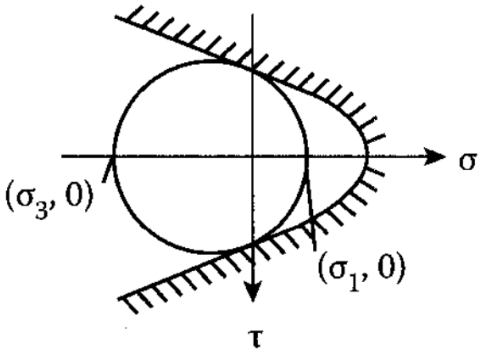
$$f(\sigma, \tau) = 0 \qquad (1)$$

feltételt.

Ez a függvény a σ, τ koordinátarendszerben ábrázolva a *Mohr*-körök burkolóját adja (*2. ábra*).



1. ábra: *Coulomb* súrlódási hipotézise

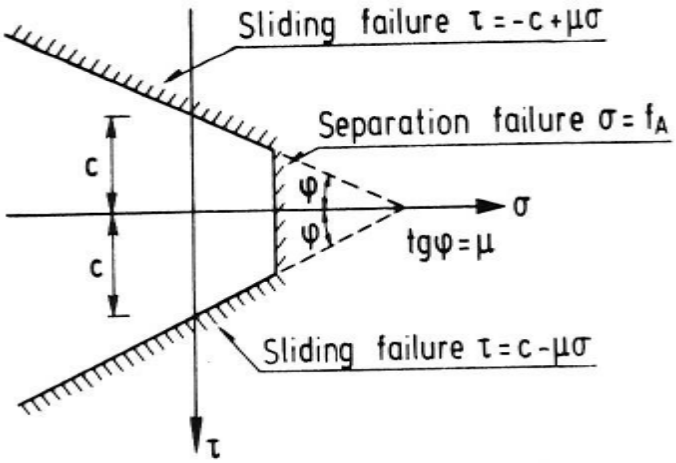


2. ábra: *Mohr* törési burkológörbéje

(A *Mohr*-kör egy szemléletes geometriai módszer a főfeszültségek nagyságának és irányának (dőlésszögének) meghatározására a globális koordináta-rendszerben megadott feszültség-komponensekből, nem több, nem kevesebb.)

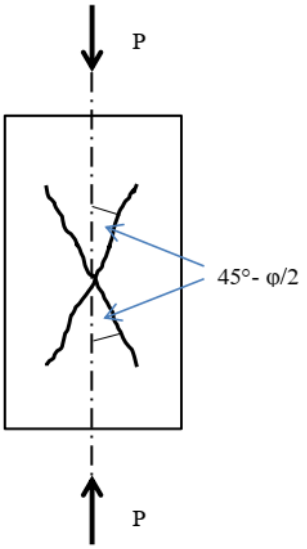
A kétparaméteres *Coulomb*- és a *Mohr*-hipotézis legegyszerűbb kiterjesztése a *Coulomb*-féle súrlódási hipotézis és a *Rankine*-féle főfeszültség-hipotézis kombinációja az elválasztási törés leírására (*3. ábra*).

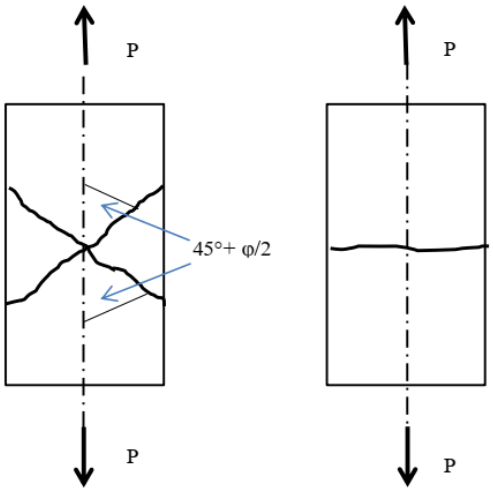
Ennek a módosított *Coulomb*-kritériumnak az az előnye, hogy a szakítószilárdság (a harmadik paraméter) a másik kettőtől függetlenül változtatható.



3. ábra: Módosított *Coulomb*-törési kritérium

A módosított *Coulomb* törési feltétel alkalmazását a nyírási és csavarási teherbírás azon kutatói erőltetik, akik modelljeikben olyan egytengelyű nyomású feszültségmezőket alkalmaznak, amelyek ferde törési felületek mentén mennek tönkre. Ragaszkodniuk kell a terhelési irányhoz képest ferde repedések meglétéhez (lásd a *4. ábrát*), még egytengelyű feszültség esetén is (a „normál" elválasztó repedéseken kívül, *5. ábra*).





4. ábra: Csúszási tönkremenetel egytengelyű nyomóigénybevétel esetén *Nielsen* (2011) szerint

5. ábra: Csúszási (balra) és szétválási (jobbra) tönkremenetel tiszta húzás *Nielsen* (2011) szerint; mindkettő előfordulhat

Az egytengelyü nyomóerővel terhelt próbatest tengelyéhez képest ferde felület mentén fellépő törés a szokásos terhelési vizsgálatoknál azért következik be, mert a fém terhelőlemez és a próbatest közötti súrlódás akadályozza a próbatest oldalirányú deformálódását, így nyírásszerű, kiegészítő terhelés keletkezik, amely ‚elfordítja' a főfeszültségek irányát.

Windisch (2022) megmutatta, hogy a módosított *Mohr-Coulomb* törési feltétel nem alkalmas sem *Kupfer* (1963) kéttengelyű, egyenletesen megoszló húzó-húzó-, húzó-nyomó- illetve nyomó-nyomó teherrel terhelt betontárcsáin nyert törési eredményei, sem *Speck* (2007) nagyszilárdságú beton (f_c' = 72 N/mm²) próbatestekkel végzett két- és háromtengelyű nyomókísérletei eredményeinek leírására.

A CEB és a *fib* a beton többtengelyű szilárdságának leírására *Ottosen* (1977) törési modelljét alkalmazza, amely a feszültségállapotokat az oktaéderes normál- és nyírófeszültségekkel írja le. A törési felület leírását az invariánsok függvényében a következő okokból tartja előnyösnek: (1) csak négy paramétert használunk; (2) szükségtelenné teszi a főfeszültségek meghatározását; (3) a felület sima és konvex, kivéve a csúcsot; (4) a meridiánok parabolikusak és a negatív hidrosztatikai tengely irányában nyitottak; (5) a deviátoros síkban lévő nyomvonal közel háromszögből kör alakúra változik a hidrosztatikus nyomás növekedésével; (6) több korábban javasolt kritériumot tartalmaz speciális esetként, különösen *Drucker* és *Prager*-, valamint *van Mises* kritériumát.

A törési felület egyenlete:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \tag{2}$$

ahol:

$$\lambda = c_1 \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \cdot arccos(c_2 \cdot cos3\theta)\right] \tag{3}$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \tag{4}$$

A négy paraméter fáradságos számításokkal határozható meg az egytengelyű húzószilárdságból, az egytengelyű nyomószilárdságból, valamint egy kéttengelyű nyomószilárdságból és a nyomóméridián végszilárdságából. A (2) előny nem létezik: az invariánsok a főfeszültségekből épülnek fel, ennek ellenére az invariánsok rendkívül átláthatatlanná teszik a meghibásodási kritériumot. A különálló főfeszültségek és a terhelési útvonal nyomon követése nem érzékelhető.

A CEB Bulletin No. 156. számában a „The Ultimate Strength Surface" (USS) leírása a következő technikai megfontolásokon és érvelésen alapul:

a. Az USS-t a feszültségtenzorok invariánsaival vagy az abból származó kifejezésekkel kell leírni,
b. Egy előzetesen terheletlen izotróp anyag esetében az USS a deviátoros síkban (poláris ábra) háromszorosan szimmetrikus a hidrosztatikus tengelyhez viszonyítva.
c. A képlékenységtan elmélete és az újabb törésmechanikai vizsgálatok megkövetelik, hogy a poláris alakzatok konvexek legyenek.
d. Egy olyan anyag esetében, amelynek egytengelyű nyomószilárdsága eltér a húzószilárdságától, különbséget kell tenni egy háromtengelyű nyomó- és egy háromtengelyű húzási görbe között.

Az általunk javasolt *Kiterjesztett Rankine Tönkremeneteli Kritérium* közvetlenül a főfeszültségeken alapul. A három főfeszültség ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) (és az irányaik a globális koordinátarendszerhez viszonyítva) egyértelműen és szemléletesen leírja a betontest valamely pontjában uralkodó feszültségállapotot.

A nyírófeszültség egy segédmennyiség, ami a globális koordinátarendszerhez való "ragaszkodásunk" eredménye. Egyetlen anyag (főleg a beton) sem megy tönkre egy nyírófeszültség miatt. A nyírófeszültség csak a tönkremenetelt okozó összetett feszültségi állapot egyik összetevője. *Egyetlen anyagnak sincs 'nyírószilárdsága'! A beton (is) csak főfeszültségekre reagál!*

Kupfer (1973) húzó-nyomó kísérleti eredményeinek kiértékelésénél *Windisch* (2021) megmutatta, hogy a törést okozó, egyidejüleg ható húzó- és nyomófeszültség (f_{ct}* vs. f_c'*) közötti összefüggés jól leírható a

$$\left(\frac{f_c'^*}{f_c'}\right)^2 + \left(\frac{f_{ct}^*}{f_{ctm}}\right)^2 = 1 \tag{5}$$

elliptikus kifejezéssel. Bevezetve a χ-hányadost: $\chi = f_c' / f_{ctm}$

$$\left(\frac{f_c'^*}{f_c'}\right)^2 + \left(\frac{\chi \cdot f_{ct}^*}{f_c'}\right)^2 = 1 \qquad (5a)$$

vagy

$$(f_c'^*)^2 + (\chi \cdot f_{ct}^*)^2 = f_c'^2 \qquad (5b)$$

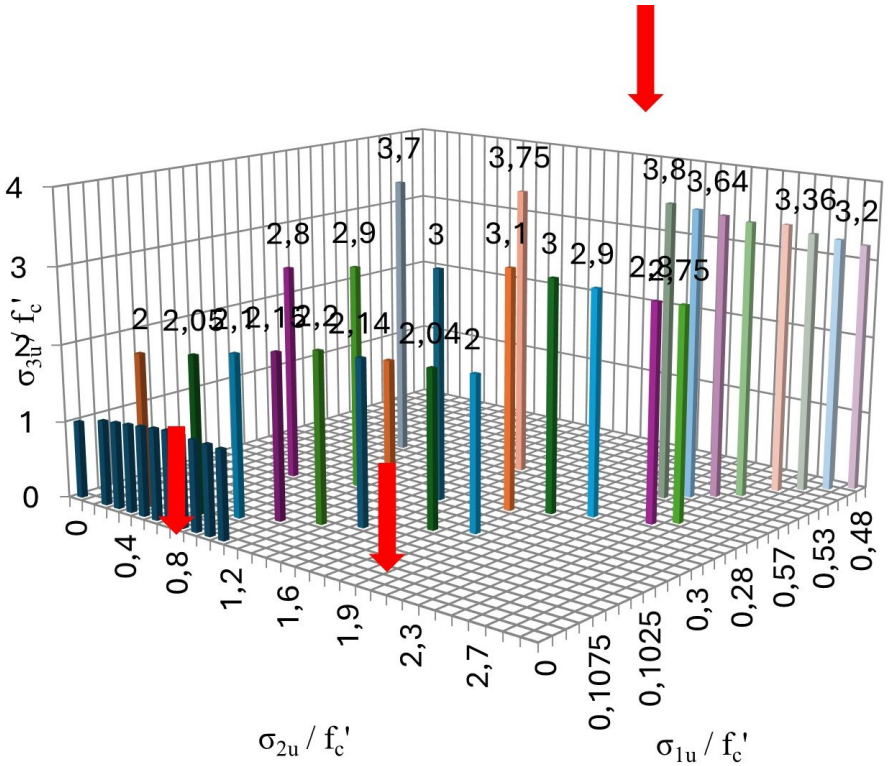
A Szerző által javasolt *Kiterjesztett Rankine Tönkremeneteli Kritériumok* a következők

- a legnagyobb (>0) főfeszültség (σ_1) nem lehet nagyobb, mint a tényleges szakítószilárdság (nagysága a σ_2 és σ_3 főfeszültségek nagyságától függ, ha legalább az egyik nyomófeszültség). Az eredeti *Rankine*-kritérium egyetlen, állandó szakítószilárdságot vesz számításba;
- a nyomófőfeszültségek $\sigma_3 = \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ hármasa nem lehet kisebb, mint a tényleges legkisebb főfeszültség (legnagyobb nyomófeszültség), σ_3, amely a másik két főfeszültség függvénye:

$$\sigma_3 = \Phi(\sigma_1, \sigma_2) \qquad (6)$$

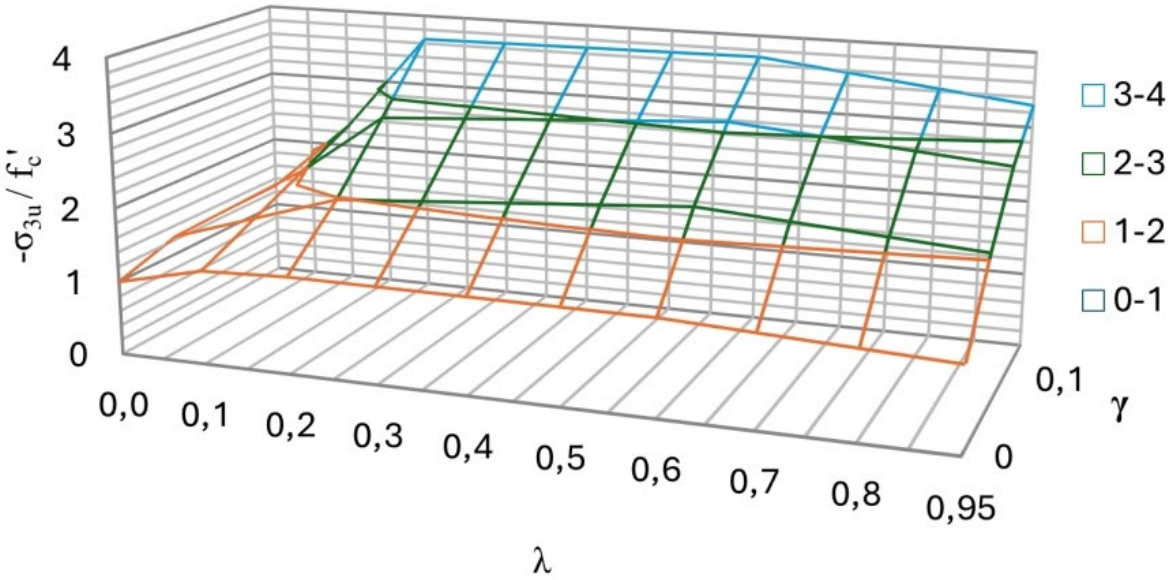
Ismeretes, hogy az oldalirányú nyomófeszültségek és/vagy az akadályozott keresztirányú deformációk (befeszülés) lehetővé teszik a nyomószilárdság hosszirányú növelését. *Ottosen* (1977) és más kutatók (CEB 1983), akik a hidrosztatikus és deviációs feszültségeket (oktaéderes normál- és nyírófeszültségeket) használják, azt állítják, hogy a végső szilárdsági felület (USS) alakja négy szilárdsági értékkel kalibrálható: az egytengelyű húzószilárdsággal, az egytengelyű nyomószilárdsággal (pont a nyomóméridiánon), a kéttengelyű nyomószilárdsággal (pont a húzási meridiánon) és egy háromtengelyű nyomószilárdsággal a nyomóméridián egy pontjában ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$).

A *7. ábra Speck* (2007) f_c' = 72 N/mm² nagyszilárdságú betonból készült próbatestekkel végzett két- és háromtengelyű terhelési kísérleti eredményeiből származtatott relatív szilárdságnövekedési felületet (USS) mutatja. A *6. ábra* azt igazolja, hogy a három (piros nyilakkal jelölt) kalibrációs szilárdság nem képes megfelelően jellemezni az USS monoton növekvő, folyamatos felületét.



6. ábra: A két- és háromtengelyű nyomószilárdság relatív növekedése mindkét másik relatív nyomófeszültség függvényében

A *7. ábra* az Ultimate Strength Surface-t, az USS-t más formában mutatja be: az abszcissza $\gamma = \sigma_1 / \sigma_3$, az ordináta $\lambda = \sigma_2 / \sigma_3$. Az USS monoton növekszik a γ-irányban, míg λ = 0,5 ~ 0,6-ig a relatív szilárdság nő, majd mérsékelten csökken.



7. ábra: Az Ultimate Strength Surface a Speck (2007) által mért adatok alapján

A törést okozó főfeszültségek meghatározása után a megfelelő normál- és nyírófeszültség-komponensek a globális koordinátarendszerben *Mohr*-körök vagy tenzorszámítás segítségével meghatározhatóak.

Megjegyzés: *a főfeszültségeket okozó tönkremenetelből számított globális nyírófeszültség-komponensek semmiképpen nem vonatkoznak nyírási tönkremenetelre!*

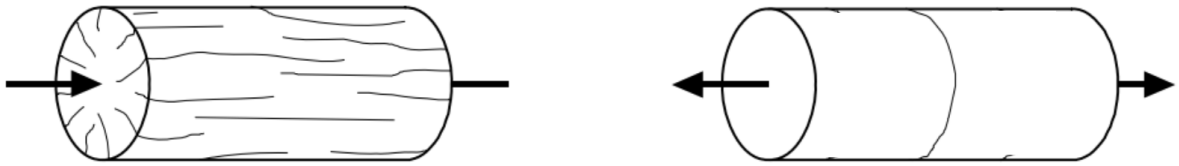
A BETON TÖNKREMENETELI FORMÁI

A beton a legnagyobb főfeszültséghez (legkisebb nyomófeszültséghez) tartozó tengelyre merőleges húzódeformációk miatt megy tönkre.

A törés típusa minden esetben szétválás, azaz a legnagyobb és esetleg a közbenső főfeszültség irányára merőlegesen diszkrét repedések keletkeznek.

A kéttengelyű nyomó-vizsgálatoknál a keresztirányú húzó alakváltozások iránya adott: a „harmadik" tengely (itt 1-es tengelyként kell jelölni). A *Kupfer*-féle (1973) biaxiális tárcsapróbáknál a tárcsa síkjára merőlegesen és a középsíkkal párhuzamosan alakultak ki repedések.

Speck (2007), aki nagy figyelmet fordított a terhelőberendezés és a próbatestek közötti súrlódás csökkentésére, minden terhelési esetben – legyen az egy-, két- vagy háromtengelyű terhelés, nyomás vagy húzás, vagy vegyes – mindig diszkrét nyúlási repedések okozta tönkremenetelt észlelt (*8. ábra*).



8. ábra: Tönkremeneteli formák egytengelyű nyomó- és húzóvizsgálatok esetén Speck (2007) szerint

A *Mohr-Coulomb* tönkremeneteli kritériumok nem megfelelőek a beton bi- és triaxiális tönkremeneteli jellemzőinek leírására.

Ezen kritériumok alkalmazása az irodalomban közölt vizsgálati eredmények értékelésénél azt bizonyítja, hogy a 2D (síkbeli) és 3D (térbeli) szilárdsági értékeket reprezentáló *Mohr*-körökre sem egyenes, sem görbe vonal nem illeszthető.

ÖSSZEFOGLALÁS

Összefoglalva: a *Mohr-Coulomb* tönkremeneteli kritérium nem alkalmazható betonra, és a beton határozottan nem súrlódó anyag.

A *Mohr-Coulomb* kritérium helyett a közvetlenül a főfeszültségeken alapuló *Kiterjesztett Rankine Tönkremeneteli Kritérium* alkalmazását javasoljuk:

- a legnagyobb (>0) főfeszültség, σ_1 nem lehet nagyobb, mint a tényleges húzószilárdság (nagysága a σ_2 és σ_3 főfeszültségek nagyságától függ, ha legalább az egyik nyomófeszültség. Az eredeti *Rankine*-kritérium állandó szakítószilárdságot tételezett fel.);
- a nyomófőfeszültségek $\sigma_3 = \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ hármasa nem lehet kisebb, mint a tényleges, törést okozó legkisebb főfeszültség (σ_3), amely a másik két főfeszültségkomponens függvénye, $\sigma_3 = \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$.

A szerző reméli, hogy a főfeszültségeken alapuló *Kibővített Rankine Tönkremeneteli Kritériumok* bevezetésével a csúszófelület menti tönkremenetelre és a törő-nyírófeszültségekre való hivatkozások okozta téves elméletek/modellek helyett a beton valódi viselkedését tükröző elméleteket lehet kidolgozni.

HIVATOZÁSOK

Comité Euro-international du Béton, (1983), Bulletin d'information N° 156: "Concrete under multiaxial states of stress. Constitutive equations for practical design", Contribution à la 23e Session plenière du C.E.B. Prague – Octobre 1983, Juin 1983, p. 149.

Drucker, D. C., Prager, W. (1952), "Soil Mechanics and Plasticity Analysis of Limit Design", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 10, No. 2, 157-165.

fib Model Code for Concrete Structures 2010 (MC2010) (2013), Fédération international du béton, Oct. 2013, Ernst & Sohn, Berlin, p. 434.

Kupfer, H. (1973), „Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, Ernst und Sohn, Berlin, p. 105.

Mohr, O. (1906), "Scientific paper on the area of technical mechanics" (Ernst & Sohn, Berlin, 1906; in German)

Nielsen, M. P. - Hoang, L. C. (2011), "Limit Analysis and Concrete Plasticity", 3rd edition, CRC Press Taylor & Francis Group, p. 796.

Ottosen, N. S. (1977), "A Failure Criterion for Concrete", Journal of Engineering Mechanics, Div. ASCE, Vol 103, EM4.

Rankine, W. J. M., (1868), "A Manual of Applied Mechanics", London

Speck, K. (2007), "Beton unter mehraxialer Beanspruchung. Ein Materialgesetz für Hochleistungsbetone unter Kurzzeitbelastung, Concrete under multiaxial loading conditions. A Constitutive Model for Short-Time Loading of High Performance Concretes" Dissertation, TU Dresden, p. 224.

Windisch A. (2021), "The tensile strength: the most fundamental mechanical characteristics of concrete" Concrete Structures, 2021 pp. 1-4. https://doi.org/10.32970/CS.2021.1.1

Windisch A. (2022), "Extended Rankine Failure Criteria for Concrete", Concrete Structures, 2022, pp. 40-46.